Lista 3: Cálculo em várias variáveis reias

A. Ramos *

June 4, 2019

1 Lista de Exercícios

Faça do livro texto[1], os seguintes exercícios.

1.1 Exercícios

1. Capítulo 14.5: Exemplo 1, Exemplo 3, Exemplo 9, 56;
2. Capítulo 14.6: Exemplo 2, Exemplo 5, Exemplo 7, 52, 53, 55, 59;
3. Capítulo 14.7: Exemplo 3, Exemplo 5, 11, 17, 21, 28, 34, 39, 47, 53;
4. Capítulo 14.8: Exemplo 1, Exemplo 2, Exemplo 5, 3, 7, 11, 18, 21, 44.

1.2 Exercícios adicionais

1. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro. Determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material. (Ver Ex: 48, Capítulo 14.7).
2. A densidade em qualquer ponto (x, y) de uma chapa retangular é $\rho(x, y) := (x^2 + y^2 + 3)^{-1}$. Encontre a razão de variação da densidade no ponto $(3, 2)$ na direção do vetor $(\sqrt{3}, 1)$. Qual é a direção e magnitude da razão de variação máxima de ρ em $(3, 2)$.
3. A equação da superfície de uma montanha é $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, onde a distância está medida em metros, os pontos do eixo x a leste e os pontos do eixo y a norte. Um alpinista encontra-se sobre a montanha no ponto $(-10, 5, 850)$. Responda: Em qual direção a inclinação é mais acentuada. Se o alpinista me mover da direção oeste, ele estará subindo ou descendo, e qual é a razão correspondente. Agora, se o alpinista se mover na direção sudeste, ele estará subindo ou descendo, e qual é a razão correspondente. Finalmente, em qual direção o alpinista estará percorrendo um caminho plano.
4. Um disco circular tem a forma da região limitada pela circuferência $x^2 + y^2 = 1$. Se a temperatura do disco é $T(x, y) = y^2 - y + x^2$. Encontre os pontos mais frios e mais quentes.
5. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{x^4+y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Mostre que f não é derivável no $(0, 0)$. Calcule a derivada direcional na origem para qualquer direção. *Rpta:* Para todo $\bar{\mu} = (\cos\theta, \sin\theta)$ temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\mu}}(0,0) = \begin{cases} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} & \text{, se } \theta \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\} \\ 0 & \text{, se } \theta \in \{\pi/2, 3\pi/2\} \end{cases}$$

6. Encontre o ângulo entre as superfícies $x^2/16 + y^2/25 + z^2/9 = 20$ e $z = 2x + y - 50$ no ponto $(8, 25, -9)$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

[1]Livro texto: Cálculo. Volume II. *J. Stewart*, 5 edição.

7. Encontre a equação dos planos tangentes à superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que sejam paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$. *Rpta:* $x + 4y + 6z = \pm 21$.

8. Qual é o ponto da curva $\mathcal{C}$ mais próximo da origem, onde $\mathcal{C}$ é a interseção de $x^2 + 4z^2 + 4y^2 = 4$ com o plano $z = x - 4y$.

9. Suponha que o produção de um artigo de luxo depende de duas compras. Os montantes destas compras são dados por $100x$ e $100y$, cujo preço por unidade é de 4 reias e 1 real, respectivamente. O montante de produção é dado por $100z$, o preço por unidade é 9. Se a função de produção é da forma $5 - x^{-1} - y^{-1}$. Determine o lucro máximo [2].

10. Encontre os pontos da curva $5x^2 + 5y^2 + 6xy = 8$ cuja distância à origem é máxima e mínima.

[2]Ver Ex 5, Capítulo 17. Livro: O cálculo com geometria analítica, vol2, L. Leithold